Teoremas inf-sup y estados límite

Dr. Alejo O. Sfriso

Universidad de Buenos Aires	materias.fi.uba.ar/6408	asfriso@fi.uba.ar
SRK Consulting (Argentina)	latam.srk.com	asfriso@srk.com.ar
AOSA	www.aosa.com.ar	asfriso@aosa.com.ar

Teorema de límites inferior y superior

Teorema de límite inferior (teorema estático)

- Campo tensional **en equilibrio** con acciones exteriores
- Respeta ecuación constitutiva

Reacciones menores o iguales a la de falla

Teorema de límite superior (teorema cinemático)

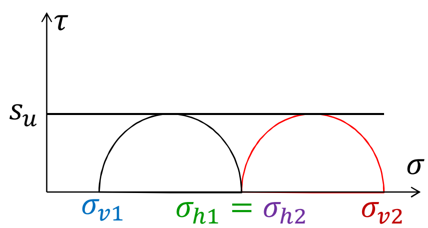
- Mecanismo con **trabajo igual a energía disipada**
- Respeta ecuación constitutiva

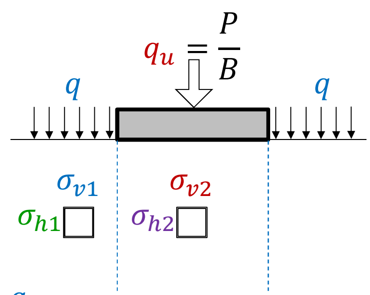
Reacciones mayores o iguales a las de falla

Teorema inferior: capacidad de carga no drenada

Campo tensional equilibrado: Líneas punteadas $\tau = 0$

- 1: $\sigma_{v1} = q$; $\sigma_{h1} = \sigma_{v1} + 2 \cdot s_u$
- 2: $\sigma_{h2} = \sigma_{h1}$; $\sigma_{v2} = \sigma_{h2} + 2 \cdot s_u = \boldsymbol{q_u} = \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{s_u} + \boldsymbol{q}$





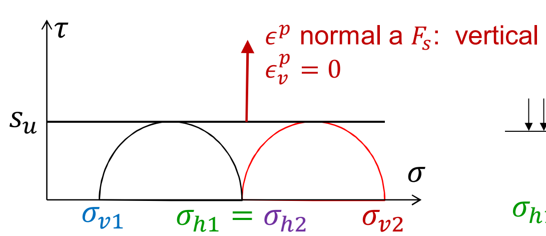
Solución exacta: $q_u = (2 + \pi) \cdot s_u + q$

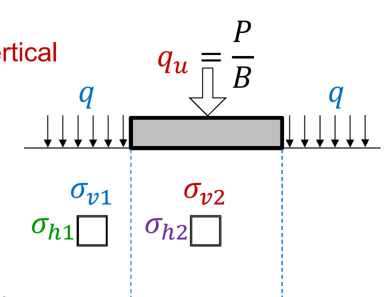
(Powrie 2014)

Teorema inferior: capacidad de carga no drenada

Campo tensional equilibrado: Líneas punteadas $\tau = 0$

- 1: $\sigma_{v1} = q$; $\sigma_{h1} = \sigma_{v1} + 2 \cdot s_u$
- 2: $\sigma_{h2} = \sigma_{h1}$; $\sigma_{v2} = \sigma_{h2} + 2 \cdot s_u = \boldsymbol{q_u} = \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{s_u} + \boldsymbol{q}$





Solución exacta: $q_u = (2 + \pi) \cdot s_u + q$

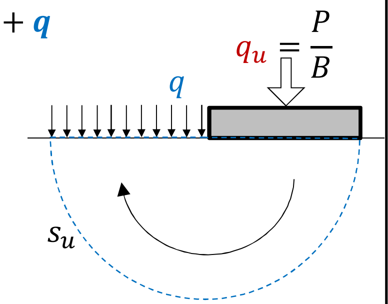
(Powrie 2014)

Estados límite

Teorema superior: capacidad de carga no drenada

Mecanismo cinemático: falla circular, giro infinitesimal θ

- 1: $W_{in} = P \cdot \frac{B}{2} \cdot \theta$
- 2: $W_{out} = (\pi \cdot B) \cdot (B \cdot \theta) \cdot s_u + q \cdot B \cdot \frac{B}{2} \cdot \theta$
- 3: $W_{in} = W_{out} \rightarrow \frac{P}{B} = \boldsymbol{q_u} = \boldsymbol{2\pi \cdot s_u + q}$



Superior: $q_u = 2\pi \cdot s_u + q$

Exacta: $q_u = (2 + \pi) \cdot s_u + q$

Inferior: $q_u = 4 \cdot s_u + q$

5

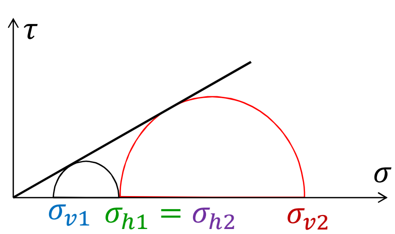
(Powrie 2014)

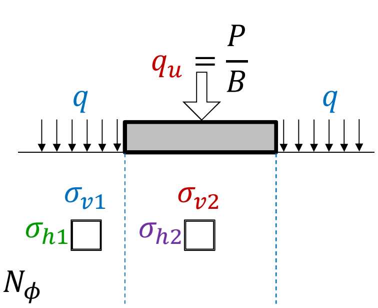
Estados límite

Teorema inferior: capacidad de carga drenada

Campo tensional equilibrado: Líneas punteadas $\tau = 0$

- 1: $\sigma_{v1} = q$; $\sigma_{h1} = \sigma_{v1} \cdot N_\phi$
- 2: $\sigma_{h2} = \sigma_{h1}$; $\sigma_{v2} = \sigma_{h2} \cdot N_\phi = \boldsymbol{q_u} = \boldsymbol{q \cdot N_\phi^2}$





Solución exacta: $q_u = q \cdot e^{\pi \tan(\phi)} \cdot N_\phi$

6

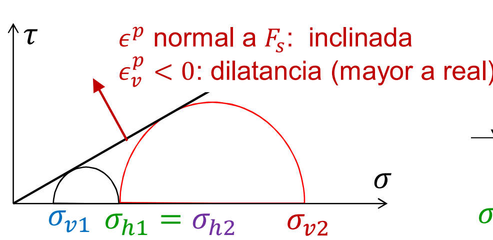
(Powrie 2014)

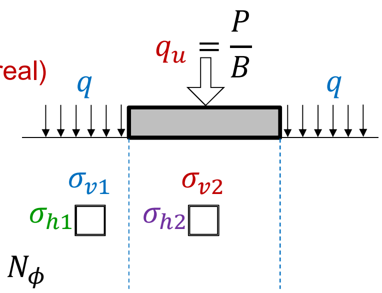
Estados límite

Teorema inferior: capacidad de carga drenada

Campo tensional equilibrado: Líneas punteadas $\tau = 0$

- 1: $\sigma_{v1} = q$; $\sigma_{h1} = \sigma_{v1} \cdot N_\phi$
- 2: $\sigma_{h2} = \sigma_{h1}$; $\sigma_{v2} = \sigma_{h2} \cdot N_\phi = \boldsymbol{q_u} = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{N_\phi^2}$





Solución exacta: $q_u = q \cdot e^{\pi \tan(\phi)} \cdot N_\phi$

7

(Powrie 2014)

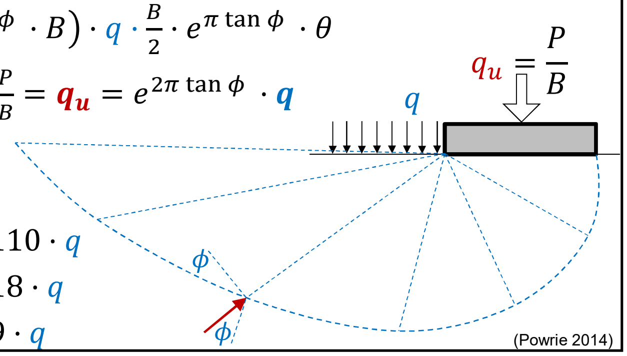
Estados límite

Teorema superior: capacidad de carga drenada

Mecanismo cinemático: giro infinitesimal θ con $\phi = \psi$

$tan[\phi] = \frac{dr}{r\,d\theta} \rightarrow r = r_0 \cdot e^{\theta \tan \phi}$ (espiral logarítmica)

- 1: $W_{in} = P \cdot \frac{B}{2} \cdot \theta$
- 2: $W_{out} = \left(e^{\pi \tan \phi} \cdot B\right) \cdot q \cdot \frac{B}{2} \cdot e^{\pi \tan \phi} \cdot \theta$
- 3: $W_{in} = W_{out} \rightarrow \frac{P}{B} = \boldsymbol{q_u} = e^{2\pi \tan \phi} \cdot \boldsymbol{q}$



Ejemplo: $\phi = 30º$

- Superior: $q_u = 110 \cdot q$
- Exacta: $q_u = 18 \cdot q$
- Inferior: $q_u = 9 \cdot q$

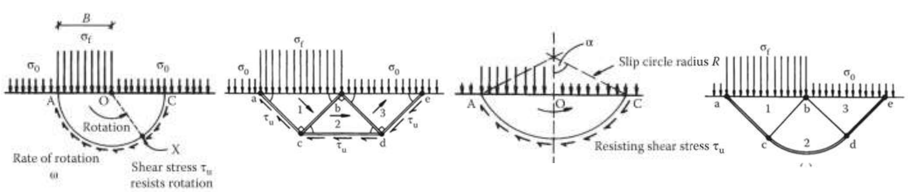
8

(Powrie 2014)

Solución exacta: cuando el teorema estático y el cinemático coinciden

La capacidad de carga de fundaciones superficiales en condición no drenada tiene la forma $q_u = N_c \cdot s_u + q$

- Teorema estático: $4.00 < \boldsymbol{N_c < 5.1\ 4}$
- Teorema cinemático: $\boldsymbol{5.1\ 4 < N_c} < 6.28$



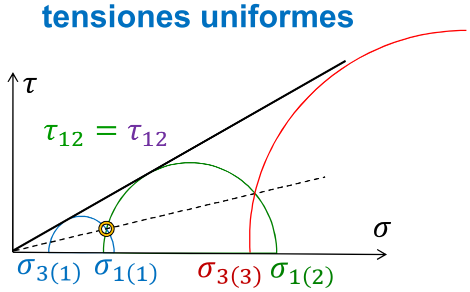
$N_c = 2\pi = 6.28$ | $N_c = 6.00$ | $N_c = 5.52$ | $N_c = 2 + \pi = 5.14$

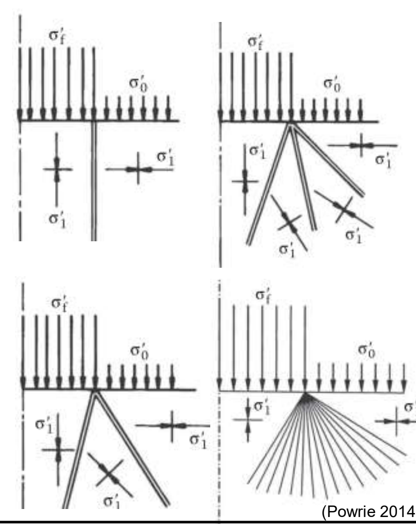
(Powrie 2014)

Saltos en el campo de desplazamientos

Líneas de discontinuidad cinemática

- Continuidad de tensiones
- Desplazamiento relativo
- **Separa zonas con tensiones uniformes**





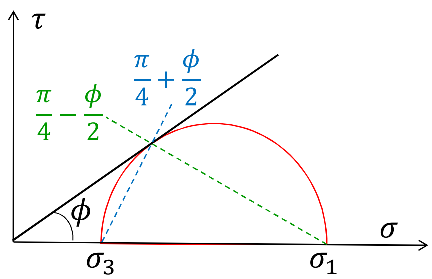
(Powrie 2014)

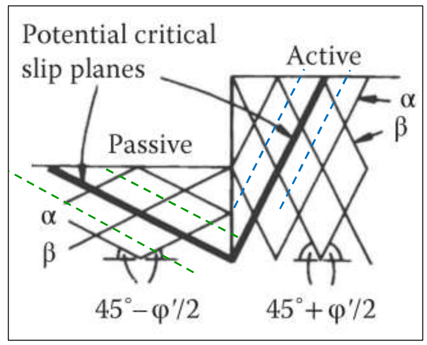
Estados límite

Líneas características

A lo largo de estas líneas el material está en fluencia

- **Patrón continuo en toda la zona plastificada**
- Más restrictiva que saltos de desplazamiento





11

(Powrie 2014)

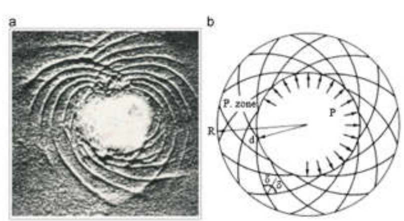
Estados límite

Líneas carácterísticas vs saltos de desplazamientos

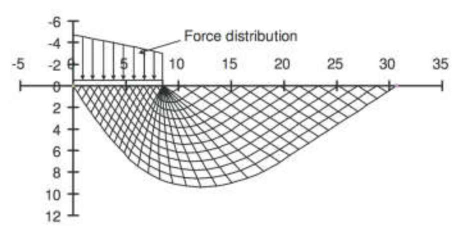
Líneas carácterísticas: solución rigurosa de ecuaciones diferenciales de plasticidad

Saltos de desplazamiento: técnica analítica para cálculo de soluciones por teorema estático

Solución exacta: líneas carácterísticas = infinitos "saltos" de desplazamiento



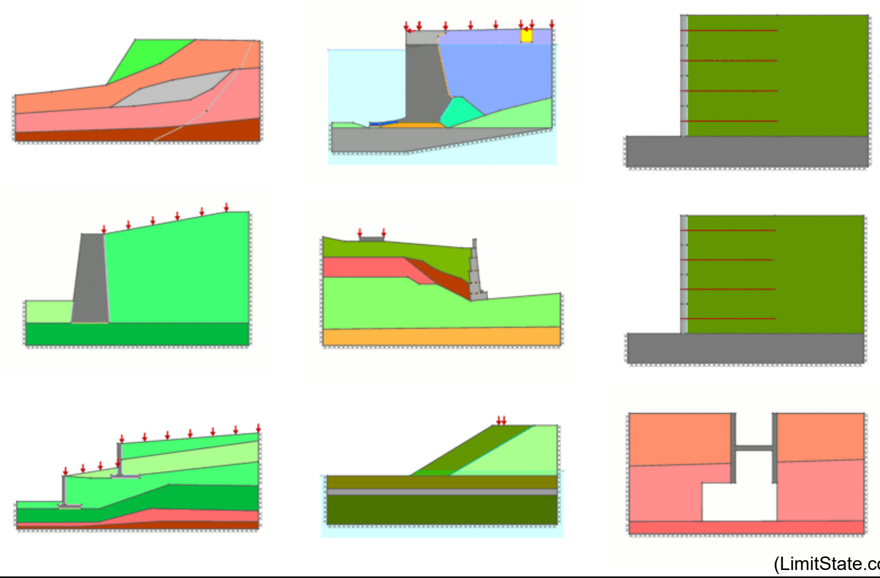
(Miller et al 2014)



12

(Wang 2008)

Soluciones numéricas



(LimitState.com)