Elasticidad lineal

Dr. Alejo O. Sfriso
Universidad de Buenos Aires materias.fi.uba.ar/6408 asfriso@fi.uba.ar
SRK Consulting (Argentina) latam.srk.com asfriso@srk.com.ar
AOSA www.aosa.com.ar asfriso@aosa.com.ar

La idea de la elasticidad lineal isotrópica

El material elástico lineal tiene un **comportamiento elástico reversible para cualquier tensión aplicada**

Ingredientes

- Módulo de Young

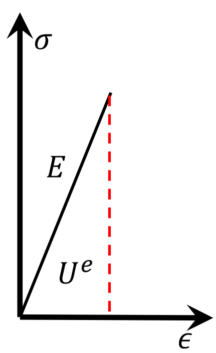
  $\boldsymbol{E} = \partial\sigma/\partial\epsilon = \sigma/\epsilon$

- Coeficiente de Poisson

  $\boldsymbol{\nu} = -\,\partial\epsilon_3/\partial\epsilon_1 = -\,\epsilon_3/\epsilon_1$

- Energía elástica almacenada (1D)

  $U^e = \frac{1}{2}\sigma \cdot \epsilon = \frac{1}{2}\epsilon \cdot E \cdot \epsilon$



Elasticidad lineal isotrópica

La relación $\sigma = E \cdot \epsilon$ es 1D (σ y ϵ son escalares)

En el espacio general de tensiones la relación es

- En componentes $\sigma_{ij} = K \cdot \epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G \cdot \epsilon_{ij}^{d}$
- En notación tensorial $\boldsymbol{\sigma} = K \cdot \epsilon_v \cdot \mathbf{1} + 2G \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{d}$
- Para deformación plana (caso 2D) con tensiones iniciales

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{0} \\ \sigma_{yy}^{0} \\ \sigma_{zz}^{0} \\ \sigma_{xy}^{0} \end{Bmatrix}$$

Restricciones a los parámetros elásticos

El trabajo de deformación debe ser positivo

$$\dot{W} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = p\dot{\epsilon_v} + s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^{d} = K\epsilon_v \cdot \dot{\epsilon_v} + 2G\epsilon_{ij}^{d}\dot{\epsilon}_{ij}^{d}$$

$$\dot{W} > 0 \; \forall \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rightarrow \boldsymbol{K > 0} \; \wedge \boldsymbol{G > 0}$$

Las relaciones entre parámetros elásticos son

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad E_{oed} = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} E$$

Por lo que también

$$K > 0 \; \wedge G > 0 \rightarrow \boldsymbol{E > 0} \wedge \boldsymbol{-1 < \nu < 0.50}$$

Relaciones simples empleadas en geotecnia

Relación tensión-deformación	$q = \sigma_3 - \sigma_1 = E\epsilon_a = 3G \cdot \epsilon_q$
Deformación por corte	$\epsilon_q = \frac{2}{3}(\epsilon_3 - \epsilon_1) = \frac{\epsilon_a}{1-2\nu}$
Presión	$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = K \cdot \epsilon_v$
Trayectoria edométrica	$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_z} = \frac{\nu}{1-\nu} = \frac{3K - 2G}{3K + 4G}$

Elasticidad lineal anisotrópica

Un material elástico puede ser

- Isotrópico: las mismas propiedades en todas direcciones (rocas ígneas)
- Ortotrópico: propiedades diferentes con tres direcciones ortogonales principales (rocas sedimentarias, madera)
- Anisotrópico: propiedades diferentes sin direcciones principales (algunas rocas metamórficas)

commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=539591

Elasticidad lineal

Elasticidad lineal ortótropa

Útil para simular el comportamiento de terreno estratificado

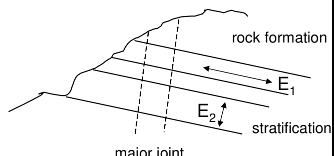
$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\end{Bmatrix} = \mathbf{D}\cdot\begin{Bmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \epsilon_{33}\\ \epsilon_{12}\\ \epsilon_{23}\\ \epsilon_{31}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\sigma_{11}^0\\ \sigma_{22}^0\\ \sigma_{33}^0\\ \sigma_{12}^0\\ \sigma_{23}^0\\ \sigma_{31}^0\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1/E_2 & -\nu_{22}/E_2 & -\nu_{12}/E_1 & 0 & 0 & 0\\ -\nu_{22}/E_2 & 1/E_2 & -\nu_{12}/E_1 & 0 & 0 & 0\\ -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 1/E_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu_{22})/E_2 \end{bmatrix}$$

Cinco parámetros con las restricciones

$E_1 > E_2 > 0 \qquad G_{12} > 0$

$(1-\nu_{11})E_2 \geq 2\nu_{12}^2 E_1$



(Plaxis UM)

7

Elasticidad lineal

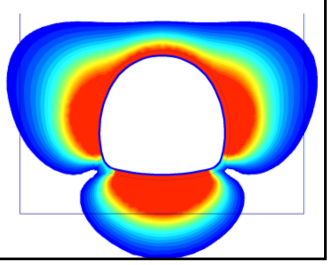
Problemas "elásticos" en geotecnia y determinación de parámetros

Cuando el suelo está lejos de "falla"

- Propagación de ondas
- Fundaciones con cargas de servicio
- Vibraciones de máquinas
- Carga lateral en pilotes
- Tensiones alrededor de túneles
- Minería subterránea a gran escala

Los parámetros elásticos dependen del rango de deformación del problema

Las tensiones locales se resuelven con modelos elastoplásticos



8