

# Introducción al método de los elementos finitos

## Ejercicio 1D

Dr. Alejo O. Sfriso

Universidad de Buenos Aires

SRK Consulting (Argentina)

AOSA

materias.fi.uba.ar/6408

latam.srk.com

www.aosa.com.ar

asfriso@fi.uba.ar

asfriso@srk.com.ar

asfriso@aosa.com.ar

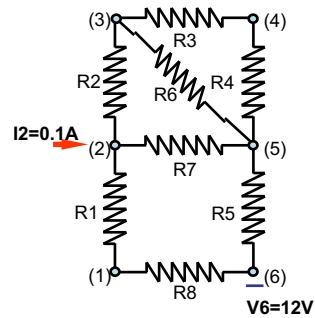
## Ejercicio 1D: Corriente en un circuito

### Hipótesis

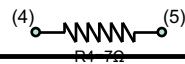
- La tensión es única en cada nodo (equivalente de compatibilidad)

- Ley de Ohm (relación constitutiva)  $I = \frac{\Delta V}{R}$

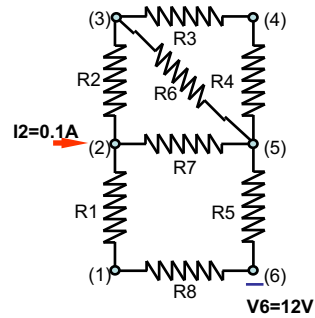
- Ley de Kirchhoff (equilibrio)  $\sum_{(N)} I = 0$



## Ley de Ohm en elemento



$$\left\{ \begin{matrix} I_6 \\ I_5 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{R_5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 12V \\ V_5 \end{Bmatrix}$$



$$I = \frac{\Delta V}{R} \rightarrow \begin{Bmatrix} I_i \\ I_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix}$$

## Ley de Kirchhoff en nodo



$$\sum_{(N)} I = 0 \rightarrow$$

$$I_1^{(1)} + I_6^{(1)} = 0$$

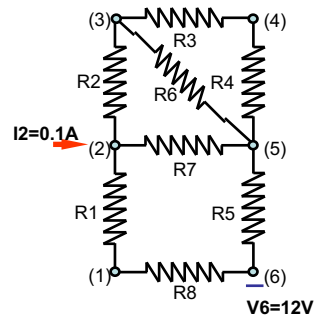
$$I_1^{(2)} + I_2^{(2)} + I_7^{(2)} = I_2$$

$$I_2^{(3)} + I_3^{(3)} + I_6^{(3)} = 0$$

$$I_3^{(4)} + I_4^{(4)} = 0$$

$$I_4^{(5)} + I_5^{(5)} + I_6^{(5)} + I_7^{(5)} = 0 \rightarrow \frac{V_5 - V_4}{R_4} + \frac{V_5 - V_6}{R_5} + \frac{V_5 - V_3}{R_6} + \frac{V_5 - V_2}{R_7} = 0$$

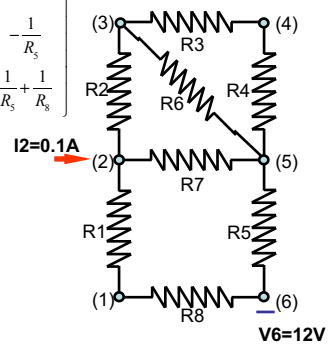
$$I_5^{(6)} + I_8^{(6)} = 0$$



## Matriz de conductividad global



$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_8} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_8} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_8} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_8} \end{bmatrix}$$



(Oñate y Zárate 2000)

## Sistema global de ecuaciones



$$K \cdot V = I$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_8} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_8} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_8} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{Bmatrix}$$

(Oñate y Zárate 2000)

## Condiciones de borde



$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_8} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_8} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_8} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ 12V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Reducción de la matriz de conductividad



Se elimina la última fila y columna y se actualiza el vector de cargas

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_8} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_8} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_8} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ 12V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_6/K_{61} \\ 0.1A \\ 0 \\ 0 \\ V_6/K_{65} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Red dashed line indicates the removal of the last row and column, and the update of the load vector.)

## Reducción de la matriz de conductividad



Se elimina la última fila y columna y se actualiza el vector de cargas

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_8} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_7} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ 0 & -\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_6/K_{61} \\ 0.1A \\ 0 \\ 0 \\ V_6/K_{65} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{I}}$$

(Oñate y Zárate 2000)

9

## Solución del sistema



Se invierte la matriz de conductividad reducida y se calcula el sistema lineal

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{I}} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12.39V \\ 12.82V \\ 12.75V \\ 12.74V \\ 12.68V \end{Bmatrix}$$

Con la ecuación eliminada se calcula

$$I_6 = 0.1A$$

(Oñate y Zárate 2000)

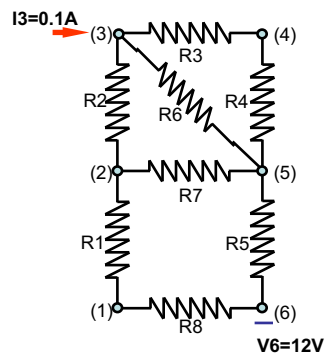
10

## Ejercicio 1D: casos alternativos

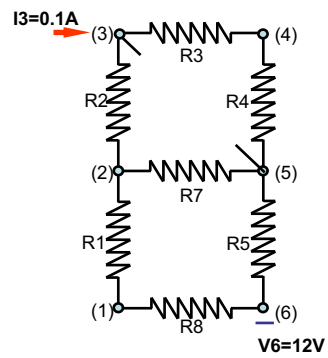


Tomando como base el ejercicio resuelto, resolver:

Cambia el vector de carga



Cambia la matriz de conductividad



(Oñate y Zárate 2000)